

# A FÖLD ALAKJÁNAK MEGJELÉSE OPTIMÁLIS TORZULÁSÚ KÉPZETES HENGERVETÜLETEKBEN

**Györffy János**

<sup>1</sup> Eötvös Loránd Tudományegyetem, Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék,  
terkep1@ludens.elte.hu, terkep1@map.elte.hu

## Összefoglalás

*Az élet számos területén találkozhatunk a legkülönbözőbb globális jelenségeket ábrázoló világtérképekkel, melyek a térképi fokhálózat tulajdonságaival szembeni igények alapján gyakran képzetes hengervetületben készülnek. A világtérkép alakja adja a szemlélő számára az első benyomást. A Föld kontúrvonalától elvárhatjuk, hogy legyen kétszeresen szimmetrikus, kerek vagy ovális alakú görbe a kartográfia által felállított hasonlósági elvnek megfelelően. Másfelől a vetületi torzulások lehetőség szerinti csökkentésének követelménye egy olyan kontúrvonalat hoz létre, melynek görbülete a térképi egyenlítőnél és a pólusoknál enyhébb, míg közepes szélességeken erősebb. Ebben a cikkben ismertetünk egy módszert, amely csökkenti a vetületi torzulásokat, és ezzel egyidejűleg a maximális görbületek csökkentésén keresztül teszi kedvezőbb alakúvá a kontúrvonalat. Világtérképeket is bemutatunk a módszer segítségével létrehozott vetületekben.*

## Abstract

*The world maps representing diverse global phenomena appear in several fields of life. On the basis of their graticule attributes, pseudocylindrical projections are preferable for them. The shape of mapped Earth gives the first impression to the viewer. Its outline is suggested to be a double symmetrical, round or oval curve to pursue the similarity principle of cartography. However, it is required to reduce map distortions as much as possible, and this induces another outline shape with more moderate curvature in the environment of the mapped poles and the equator, and with stronger curvature on middle latitudes. This paper introduces a method how to decrease map distortions and how to create a more favourable outline by diminishing the maximal curvature simultaneously. Some of new projections for world maps produced by this method are also presented.*

## **Bevezetés**

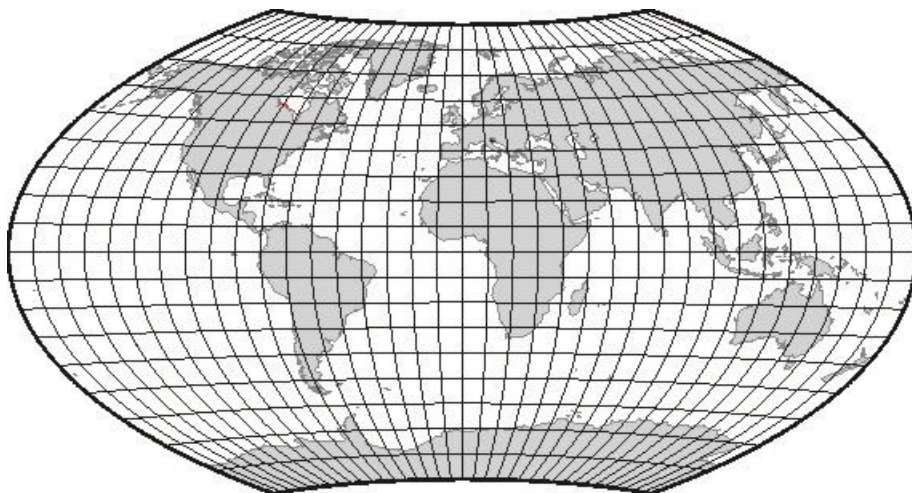
A globalizáció térhódításával a legkülönbözőbb témákat ábrázoló világtérképek – a médián és az interneten keresztül – a mindennapi élet részévé váltak. Ezeknek a jelentős része mind kartográfiai, mind esztétikailag igénytelen alkotás. Színvonalasabb világtérképekkel a nagyközönség inkább a közismereti és az iskolai történelmi és földrajzi atlaszokban találkozhat.

Egy ilyen világtérkép kinézetét alapvetően meghatározza a vetülete, melynek szakszerű megválasztásához hagyományosan két fő követelményt szükséges figyelembe venni: egyrészt a *vetületi torzulásokat* kell a lehető legkisebb szinten tartani, másrészt – tekintetbe véve, hogy ezeknél a térképeknél a térbeli jelenség *szemléltetése* kerül előtérbe a térképi *mérhetőség* rovására – az ábrázolás *hasonlóságának* az Ókor óta ismert kívánalma válik hangsúlyossá (KLINGHAMMER, 2015).

A térképen megjelenő globális földfelületi objektumok (pl. kontinensek, óceánok) térképi hasonlóságával terjedelmes irodalom foglalkozik (CANTERS, 2002). Mi itt a kérdés egy másik aspektusára, a Föld, mint egész alakjának érzékeltetésére összpontosítunk. Ebben a Föld térképi megjelenítésének a kontúrvonala a döntő, emellett a fokhálózat térképi megjelenésének is van szerepe.

### **A Föld-ábrázolás kontúrvonalának alakja**

A térképkészítés területére is betört az utóbbi évtizedekben a design. Ennek egyik megnyilvánulása, hogy a világtérképek látványos, néha meghökkentő kontúrokból mutatják be a Földet. (Erre egy kevésbé extrém példa az Aitoff–Wagner-vetület, 1. ábra.)

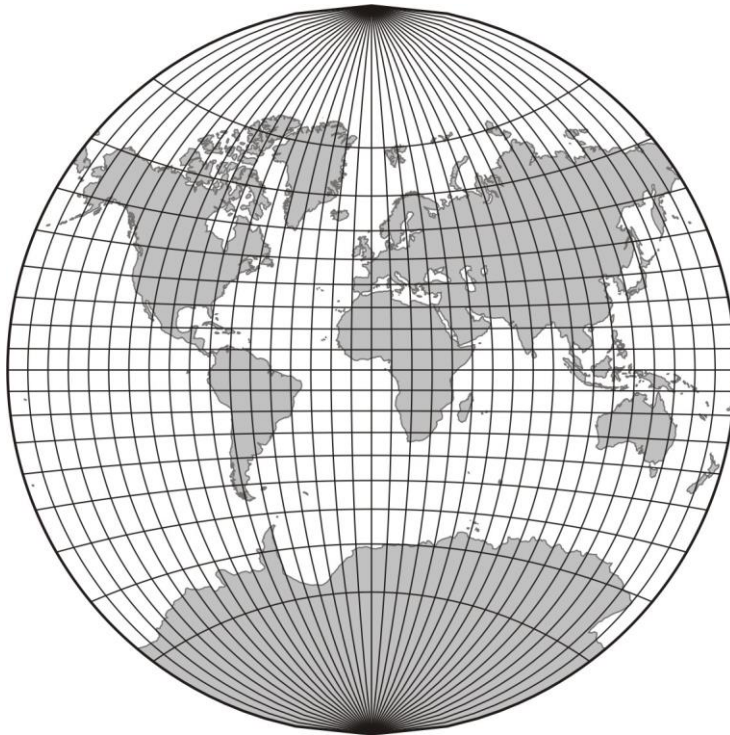


**1. ábra** Aitoff–Wagner-féle pólusvonalas vetület

Ha ezekkel a megoldásokkal szemben a hasonlóság és/vagy a torzulás-minimalizálás hagyományos elvét követjük, akkor más irányba kell haladnunk. Szeretnénk egyrészt, hogy az alak lehetőleg emlékeztessen a Föld alakjára. Gondolhatunk itt a gömbalakot idéző kör-kontúrra, de számításba jön az ellipszis- vagy más hasonló ovális alak, amiről a földi ellipszoid alakjára asszociálhatunk. Itt a kézenfekvő megoldásokat (pl. Van der Grinten-féle vetület, ld. 2. ábra, Mollweide vetülete) a fellépő erős torzulások, deformációk miatt kell kizárni. Másrészt célszerű megkövetelni a térképi Föld-kontúrvonaltól, hogy ne legyenek rajta éles törések, szögletek. (Ez a feltétel kizárja a pólusvonalas vetületek nagy részét.) A szélesebb körben ismert vetületek közül ezek után Aitoff és Hammer vetülete, Eckert III. és IV. vetülete, és esetleg Winkel vetülete marad alkalmazásra ajánlhatónak.

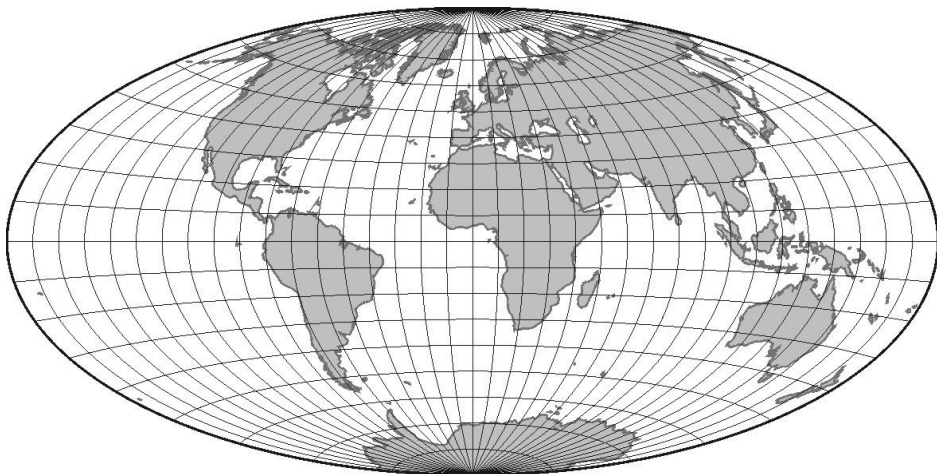
### **A térképi fokhálózat sajátosságai**

A földrajzi fokhálózat az Ókor óta ismert módszere a földi pontok lokalizálásának. A földgömbökön és a térképeken keresztül nagymértékben átment a köz-



**2. ábra** *Van der Grinten vetülete*

tudatba. A perspektíva törvényei azt követelnék meg, hogy a szélességi körök a térkép szélei felé valamelyest összetartó ellipszisívek legyenek, amint az az ortografikus vetületnél meg is valósul. A kedvező torzulások követelménye viszont olyan vetületeket helyez előtérbe, ahol a szélességi körök a térképen éppen, hogy távolodnak egymástól a középmeridiántól a határoló meridiánok felé haladva (pl. Aitoff vetületénél, ld. 3. ábra).



**3. ábra** *Aitoff vetülete*

A kétféle ellentétes követelmény a szélességi köröket párhuzamos egyenesként ábrázoló *képzetes hengervetületek* alkalmazását teszi ajánlatossá.

A meridiánok a perspektíva törvényeit akkor követik leginkább, ha ellipszisív alakúak. A már említett ortografikus vetület mellett ez több képzetes vetületnél (pl. a már említett Mollweide-vetületnél, vagy Eckert III. és IV. vetületénél) is megfigyelhető.

Lényeges kérdés a pólus térképi megjelenése. A *pólusvonalas* vetületeknél a torzulások többnyire kedvezőbbek, míg a hasonlóság szempontjából a *póluspontos* vetületek tekinthetők jobbnak. Megjegyezzük, hogy Baranyi János (BARANYI, 1987) átmeneti megoldásnak tekinti és *pólusívesnek* nevezi azokat a vetületeket, amelyeknél – a pólusvonal elkerülésére – magasabb szélességeken úgy változtatjuk meg a meridiánok futásának szabályát, hogy az egyébként pólusvonalas vetületek póluspontosá váljanak.

### **Azonos területet ábrázoló térképek összehasonlítása a vetületi torzulások alapján**

A szóban forgó atlaszokban a speciális vetületi igényű, területtartást vagy néha szögtartást megkövetelő *tematikus* világtérképek mellett mindig előfordulnak *általános földrajzi* világtérképek. A térképek torzulásalapú összehasonlításhoz a térképen fellépő torzulási értékeket egyetlen számba kell tömörítenünk, ami alapján rangsorolni tudjuk az ugyanazon területet, esetünkben az egész Földet ábrázoló térképek vetületeit. Itt elsősorban a *terület-* és *szögtorzulások* jönnek számításba, amelyek a térképről – területtartó vagy szögtartó vetület választása révén – alternatív módon kiküszöbölhetők. Az ezektől eltérő jellegű, a térkép néhány pontja vagy vonala kivételével *mindenütt* torzító hatást kifejtő *hossztorzulásokat* a szög- és területtorzulás következményének tekintjük, és figyelmen kívül hagyjuk.

A terület- és szögtorzulások egyaránt zavaróan deformálják a nagy kiterjedésű térképi objektumok alakját egyfelől elcsavarodás, másfelől a méretviszonyok (esetenként drasztikus) megváltoztatása révén. Ezért a térképi kontúrvonalra és fókálózatra vonatkozó követelmények figyelembe vétele után leszögezhetjük, hogy a hasonlóság elve szempontjából az *általános torzulású* (tehát sem területtartó, sem szögtartó és így viszonylag csekély alaktorzulást mutató) *póluspontos képzetes hengervetületek* a legkedvezőbbek. A továbbiakban ebből a vetületi körből igyekszünk a legkedvezőbb torzulását kiválasztani úgy, hogy a kontúrvonal alakja is összhangban legyen a fentiekkel.

A torzulások mérése az *Airy–Kavrajcskij-kritérium* (KAVRAJSZKIJ, 1958) alapján történik, amely a térkép pontjaiban fellépő terület- és szögtorzulási mutatószámok összegzésének az ábrázolt területre történő átlagolásával kapható. A területtorzulás és a szögtorzulás nagyságát sorra az

$$\ln^2(a \cdot b) \text{ és az } \ln^2(a/b)$$

mennyiséggel mérjük, ahol  $a$  és  $b$  sorra a térkép valamely pontjában fellépő maximális és minimális hossztorzulást (másként a Tissot-féle torzulási ellipszis nagy- és kisméretű tengelyének hosszát) jelöli. Ezek a mennyiségek – ha a földrajzi szélességre a  $\varphi$ , a földrajzi hosszúságra a  $\lambda$  jelölést vezetjük be, a térképi síkkoordinátákat pedig a

matematikában szokásos módon  $x$ ,  $y$ -nal jelöljük – a kérdéses vetületünket leíró  $x(\varphi, \lambda)$  és  $y(\varphi, \lambda)$  vetületi egyenleteinek parciális deriváltjaiból kapott

$$a = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2\right] + 2 \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cos \varphi} + \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2\right] - 2 \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cos \varphi}}{2}$$

és

$$b = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2\right] + 2 \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cos \varphi} - \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2\right] - 2 \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cos \varphi}}{2}$$

képlettel adhatók meg. (Az  $x$  és  $y$  vetületi egyenleteket az egyszerűség kedvéért egységnyi gömbsugárra és egységnyi méretarányra írjuk fel.)

A térkép bármely pontbeli teljes torzultságát a Kavrajcszkij nyomán Bajeva (BAJEVA, 1987) által adott

$$\varepsilon_K^2 = \frac{\ln^2(a \cdot b) + \ln^2\left(\frac{a}{b}\right)}{2}$$

formában számoljuk. Megjegyezzük, hogy az általános torzulású vetületeknél azon pontokban, amelyekben sem szögtartás, sem területtartás nem áll fenn, a két pozitív szám összegeként előálló Airy–Kavrajcszkij-mutatószám kisebb lehet, mint akár a szögtartó, akár a területtartó pontokban egyetlen tagból számolt érték. Ilyen minimális torzulási értékek a terület- és szögtartás *egyensúlyából* erednek, amelyet a problémával először foglalkozó Airy brit csillagász „*balance of errors*” névvel látott el (AIRY, 1861).

Vizsgáljuk meg még a térkép valamely pontjában tetszőleges irányban fellépő *hossztorzulás* kérdését. Ha ez az irány egy rögzített iránnyal (az ún. első vetületi főiránnyal – GYÖRFFY, 2012)  $\nu$  szöveget zár be, akkor az  $l$  hossztorzulást az alábbi képlet adja meg:

$$l = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \nu + b^2 \cdot \sin^2 \nu} = \sqrt{a \cdot b \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \cos^2 \nu + \frac{a \cdot b}{\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \sin^2 \nu},$$

vagyis az  $l$  hossztorzulás felírható az  $(a \cdot b)$  területtorzulás és az  $(a/b)$  szögtorzulási mutató függvényében, ezért a szóban forgó pontban fellépő teljes torzultságnál nem vesszük figyelembe.

Ha a fenti  $\varepsilon_K^2$  mutatószámot az ábrázolandó  $T$  terület minden pontjában ismertnek (vagyis képlettel adottnak) tekintjük, akkor kiszámítható ezek átlagolásával az  $E_K^2$  Airy–Kavrajcszkij-kritérium, az alábbi felületi integrállal:

$$E_K^2 = \frac{1}{\mu(T)} \cdot \iint_T \varepsilon_K^2 dT,$$

ahol  $\mu(T)$  jelöli az ábrázolandó  $T$  terület nagyságát (vagyis a felszínét). Amikor az egész Földet ábrázoljuk, akkor a sarkok  $5^\circ$ - $5^\circ$ -os környezetét a számításból kihagyjuk

(FRANČULA, 1971), mert ott a torzulások végtelen nagyra megnövekedhetnek, esetünkben ezért  $E_K^2$  az alábbi alakot ölti:

$$E_K^2 = \frac{1}{2 \cdot \sin 85^\circ} \cdot \int_{-85^\circ}^{85^\circ} \int_{-180^\circ}^{180^\circ} \varepsilon_K^2 \cdot \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi.$$

Ha több világtérképre kiszámoljuk az Airy–Kavrajcszkij-kritériumot, akkor ezek segítségével össze tudjuk hasonlítani e vetületeket a teljes torzultságuk szempontjából, és torzultsági rangsort tudunk felállítani köztük. Ha egy végtelen sok vetületet tartalmazó vetületcsaládból meghatározzuk a legkisebb torzultságút, akkor ezt *optimális torzultságú* vetületnek nevezzük.

### A torzulások minimalizálása a képzetes hengervetületek körében

Vizsgáljuk a problémát matematikai szempontból. A képzetes hengervetületeknél az  $x(\varphi, \lambda)$  vetületi egyenlet a  $\lambda$ -nak páratlan, szigorúan monoton növény, a  $\varphi$ -nek páros függvénye, míg – minthogy a parallelkörök képei párhuzamos egyenesek – az  $y(\varphi)$  vetületi egyenlet nem függ a  $\lambda$  hosszúságtól, és a  $\varphi$ -nek páratlan, szigorúan monoton növény függvénye.

Belátható (GYÖRFFY, 2016), hogy az Airy–Kavrajcszkij-kritérium szerinti *legjobb* képzetes hengervetület középmeridiánja mentén mindig hossztartás áll fenn, vagyis szükségszerűen

$$y = \varphi$$

Ezek után a legjobbnak tekintett, tehát minimális kritérium-értéket felmutató vetület  $x(\varphi, \lambda)$  egyenletét közelítéssel határozzuk meg. A közelítés hatékonysága függ a használt közelítő függvényről. Erre a célra az  $x(\varphi, \lambda)$  függvényt a fenti követelményeknek eleget tevő  $\varphi$ -függvény és  $\lambda$ -függvény *szorzataként* írjuk fel, nevezetesen a

$$c_1 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot |\varphi|}{\pi} \right)^{c_2} \right]^{c_3} \cdot f(\lambda)$$

függvényt használjuk. (Speciálisan a  $c_1=1$ ,  $c_2=2$ ,  $c_3=2$  és  $f(\lambda)=\lambda$  esetben Apianus II. vetületét – pontosabban annak az egész Földre kiterjesztett változatát – kapnánk, melynek meridiánjai fél ellipsziszívek, és a Földet ellipszis-kontúrban ábrázolja, melynek Egyenlítő-irányú tengelye kétszer olyan hosszú, mint a középmeridián-irányú tengely.)

Számításainkban harmadfokú,

$$f(\lambda) = \lambda + c_4 \cdot \lambda^3$$

alakú függvényvel dolgoztunk. A fenti paraméterek közül  $c_1$  lényegében a parallelkörök, köztük a térképi egyenlítő hosszát befolyásolja, a  $c_4$  pedig a parallelkörök mentén fellépő hossztorzulást szabályozza oly módon, hogy  $c_4 < 0$  esetén az osztásközök a parallelkörökön a középmeridiántól a térkép szélei felé haladva csökkennek, míg  $c_4 > 0$  esetén nőnek, végül  $c_4 = 0$  az egyenközűséget („ekvidisztanciát”) jelenti. A hatványozás  $c_2$  és  $c_3$  együtthatói a meridiánok lefutásának módját határozzák meg. Ez utóbbiakról azt követeltük meg, hogy közülük

legalább az egyik különbözzön 2-től. Ennek megfelelően három változatot vizsgáltunk:

a)  $c_2 \neq 2, c_3 = 2$ . A vetületi egyenletek:

$$x = c_1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot |\varphi|}{\pi}\right)^{c_2}} \cdot (\lambda + c_4 \cdot \lambda^3)$$

$$y = \varphi$$

b)  $c_2 = 2, c_3 \neq 2$ . A vetületi egyenletek:

$$x = c_1 \cdot \left(1 - \left(\frac{2 \cdot \varphi}{\pi}\right)^2\right)^{\frac{1}{c_3}} \cdot (\lambda + c_4 \cdot \lambda^3)$$

$$y = \varphi$$

c)  $c_2 \neq 2, c_3 \neq 2$ . A vetületi egyenletek:

$$x = c_1 \cdot \left(1 - \left(\frac{2 \cdot |\varphi|}{\pi}\right)^{c_2}\right)^{\frac{1}{c_3}} \cdot (\lambda + c_4 \cdot \lambda^3)$$

$$y = \varphi$$

## A térképi kontúrvonal alakjának kiértékelése

A Föld alakjának hasonlósága szempontjából – mint arra már rámutattunk – a kontúrvonal alakulása is érdekes. Itt a töréspontok korábban említett kizárásán kívül főleg az alábbi követelményeket célszerű megfogalmazni:

- 1) A Föld a térképen legyen konvex idom, vagyis bármely két földi pontot összekötve egy egyenessel, az végig a térképi kontúrvonalon belül haladjon.
- 2) A kontúrvonal a pólusnál észrevehetően görbüljön (vagyis a pólusábrázolás markánsan térjen el a pólusvonalas vetületekétől), és lehetőleg mindenhol legyen valamennyi görbülete.
- 3) A kontúrvonalon viszont lehetőleg ne legyenek kis sugarú ívek sem.

E követelmények ellenőrzése a kontúrvonal *görbületének* vizsgálatával történik. A kontúrvonalat a  $\pm 180^\circ$ -os határoló meridiánok képe alkotja. A képzetes hengervetületek kétszeres szimmetriája miatt elegendő ennek a görbének a negyedrészt, pl. az egyenlítőtől az egyik pólusig terjedő ívet vizsgálni. Az egyszerűség kedvéért a görbületet a  $\varphi$  szélesség függvényében írjuk fel. A kontúrgörbének a  $\varphi$  szélességhez, mint paraméterhez tartozó koordinátái a vetületi egyenletekből:  $x(\varphi, \lambda = \pi)$ ,  $y = \varphi$ . A görbét felírhatjuk  $x(y)$  függvény alakban,  $y$ -t tekintve független változónak. Ekkor a függvénygörbe pontjaiban fellépő  $\kappa$  görbületet a differenciálgeometriából ismert módon, a simulókör sugarának reciprokaként definiáljuk, és az erre vonatkozó képlettel adjuk meg:

$$\kappa = \frac{\left| \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} \right|}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad \lambda = \pi$$

ahol az  $y=\varphi$  egyenlőség miatt  $dx/dy$  helyett  $\partial x/\partial \varphi$ -t írunk. Ennek segítségével meghatározzuk kontúrvonal menti görbületeket a  $\varphi$  függvényeként, következő lépésként pedig elosztjuk a fellépő legnagyobb,  $\kappa_{\max}$ -szal jelölt görbületet (amely ott lép fel, ahol a simuló kör sugara a legkisebb) a  $\kappa_{\text{atl}}$  átlagos görbülettel, hogy a kontúrvonal nagytításából-kicsinyítéséből eredő görbület-változásokat kiküszöböljük:

$$g = \frac{\kappa_{\max}}{\kappa_{\text{atl}}}$$

A Földet körkontúrban ábrázoló vetületeknél (pl. Van der Grinten vetülete) a kontúrvonal görbülete mindenütt állandó, így

$$\kappa_{\max} = \kappa_{\text{atl}} = \text{const} \cdot$$

Az ellipszis-kontúrú vetületeknél (pl. Mollweide, Aitoff, Hammer vetülete, Apianus II. vetülete) a görbület az egyenlítőnél a legnagyobb, és mindkét pólus felé fokozatosan csökken. Az optimális torzulású képzetes hengervetületeknél a görbületek másként alakulnak (GYÖRFFY, 2016): az egyenlítőnél a görbület általában kicsi (esetleg zérus), majd magasabb szélességek felé növekszik, elér egy maximumot, és a pólus felé ismét csökken (esetleg zérusra). A görbületek tehát széles tartományban változnak, ami a kontúrvonaltól elvárt ovális alaktól több-kevesebb eltérést okoz.

A kontúrvonalat úgy igyekeztünk megváltoztatni, hogy a rajta fellépő nagy görbületek bizonyos mértékben csökkenjenek. Ennek következtében a kis görbületek növekednek, így a görbületek a teljes kontúrvonalat tekintve egyenletesebbé válnak, a kontúrvonal alakja az oválishoz közelít. Az is lényeges, hogy a maximális görbület szélessége ne legyen közel  $\pm 90^\circ$ -hoz, mert ez esetben – főleg ha ez együtt jár zérushoz közeli görbültséggel a pólusban – a kapott kontúr alig különböztethető meg a pólusvonalasétól, amint az Snyder optimális torzulású területtartó képzetes hengervetületénél is megfigyelhető (SNYDER, 1985). A kontúrvonal megváltoztatása eredményeként a teljes torzulási érték a minimálishoz képest természetesen valamelyest megnövekszik, de az eljárásnál ügyelünk arra, hogy ne következzen be a torzultság érdemi növekedése.

A minimumszámítás során minden iterációs ciklusban kiszámítottuk a fenti  $E_K$  kritériumot és a  $g$  hányadost, és ez utóbbinak a  $2^i$ -edik gyökét ( $i=0,1,2,\dots$ ) beszoroztuk  $E_K$ -val. A minimalizálandó  $Err$  célfüggvény tehát:

$$Err = E_K \cdot \sqrt[2^i]{g}$$

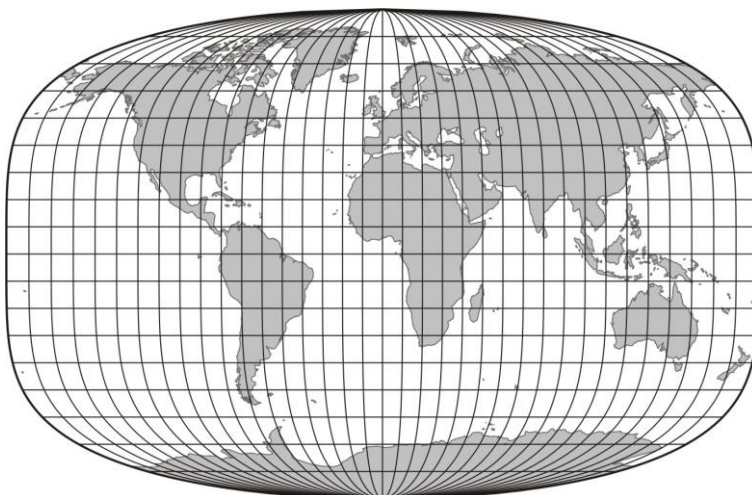
Optimálisnak azt a vetületet tekintjük, amelynek  $c_j$  együtthatóival számolva a legkisebb  $Err$  célfüggvény-érték adódik. Minél kisebb az  $i$  értéke, annál inkább dominál a  $g$  hatása az  $Err$  szorzatban a minimumszámítás során. Ennek megfelelően a kontúrvonal annál inkább ovális alakot vesz fel, eközben azonban a torzulás nő. A számításaink során az  $E_K$  kritérium 1-2%-os növekedését még elfogadhatónak tartottuk.



## A számítások és az eredményként kapott vetületek

Az  $E_K$  kritérium értékeit a kétdimenziós Simpson-formulával kaptuk a földrajzi koordináták  $1^\circ$ - $1^\circ$ -os felosztása mellett. A görbületi értékeket a negyed-kontúrvonalon – az egyenlítőnél és a pólusnál fellépő szingularitás miatt –  $\varphi = 1^\circ$  és  $\varphi = 89^\circ$  között fokenként számítottuk ki. A minimumkeresést a Nelder–Mead-féle szimplex algoritmus alapján készült programmal végeztük.

- A)  $c_2 \neq 2$ ,  $c_3 = 2$ : Ennél a vetülettípusnál a póluspontos jelleg markánsan megmutatkozik.
- a) Az átlagos torzultság a  $c_1 = 0,73044$ ;  $c_2 = 4,20041$ ;  $c_4 = 0,00471$  értékeknél adódik a legkisebbnek:  $E_K^2 = 0,13510$ , azaz  $E_K = 0,36756$ . A görbület jellemzői:  $\kappa_{\max} = 1,41964$ ;  $\varphi_{\kappa_{\max}} = 52^\circ$ ;  $\kappa_{\text{atl}} = 0,64303$ ;  $g = 2,20773$ .



4. ábra Képzetes hengervetület A) a) verzió

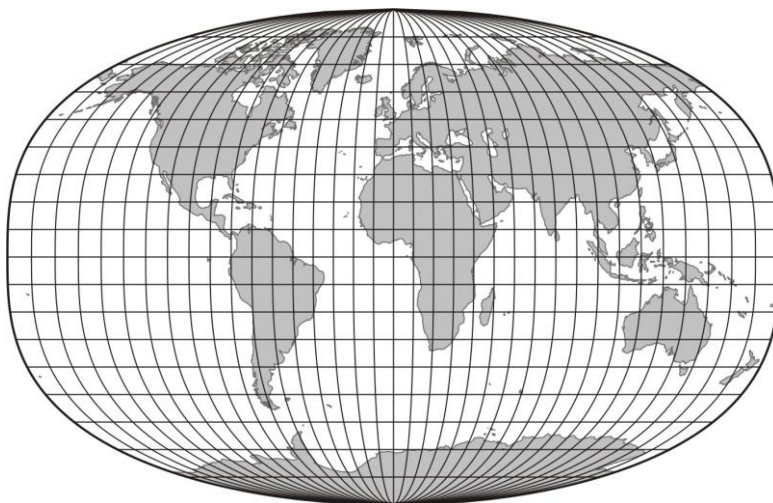
A térképi Föld-ábrázolás kontúrvonalának görbülete – a 4. ábrán is jól követhetően – az Egyenlítőnél zérus, innen  $\pm 30^\circ$ -ig alig változik, a pólusok felé tovább haladva gyorsan növekedni kezd,  $\pm 52^\circ$ -nál felveszi a maximumát, majd a pólusok felé lecsökken 0,134-re. A térkép jól kitölthet egy olyan térképlapot, ahol az oldalak aránya  $\sim 2:3$ .

- b) A kontúrvonal maximális görbületét  $i=3$  választással, vagyis az  $Err = E_K \cdot \sqrt[3]{\kappa_{\max} / \kappa_{\text{atl}}}$  kifejezés minimalizálásával csökkentjük:  $c_1 = 0,72611$ ;  $c_2 = 2,84512$ ;  $c_4 = 0,00729$  mellett  $\kappa_{\max} = 1,04352$ ;  $\varphi_{\kappa_{\max}} = 39^\circ$ ;  $\kappa_{\text{atl}} = 0,64265$ ;  $g = 1,62378$ ; továbbá  $E_K^2 = 0,13949$ , azaz  $E_K = 0,37348$ . Az előző vetülethez képest a  $g$  arány jelentősen (mintegy 27%-kal) csökken, a kontúrvonal görbülete kiegyenlítettebb, az  $E_K$  torzultság csak 1,61%-kal nő (5. ábra).

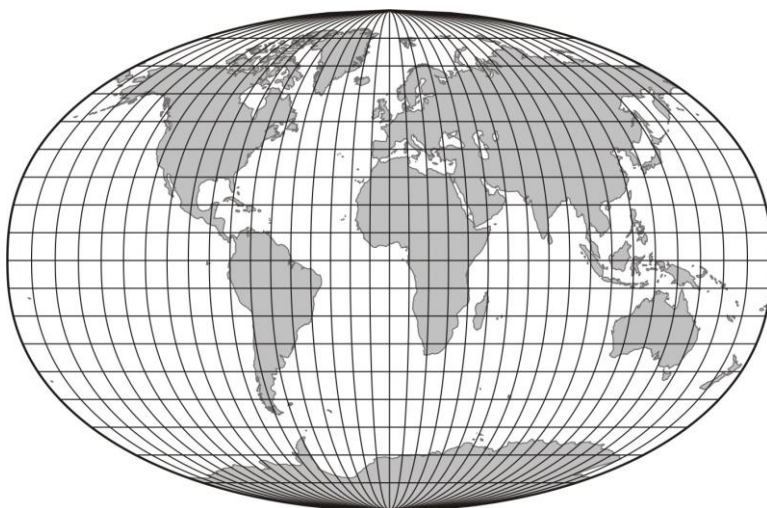
- c) A kontúrvonal maximális görbületét  $i=1$  választással, vagyis az  $Err = E_K \cdot \sqrt{\kappa_{\max} / \kappa_{\text{atl}}}$  kifejezés minimalizálásával csökkentjük:  **$c_1=0,70439$ ;  $c_2=2,31599$ ;  $c_4=0,00830$**  mellett  $\kappa_{\max}=0,90716$ ;  $\varphi_{\kappa_{\max}}=28^\circ$ ;  $\kappa_{\text{atl}}=0,64129$ ;  $g=1,41459$ ; továbbá  $E_K^2=0,14884$ ; azaz  $E_K=0,38580$ .

A  $g$  arány további 6%-kal csökken, a kontúrvonal közelít az ellipszis-alakhoz. A torzultság az a) alapvetülethez képest 4,96%-kal nő, ami már túllépi a toleranciaküszöböt (6. ábra).

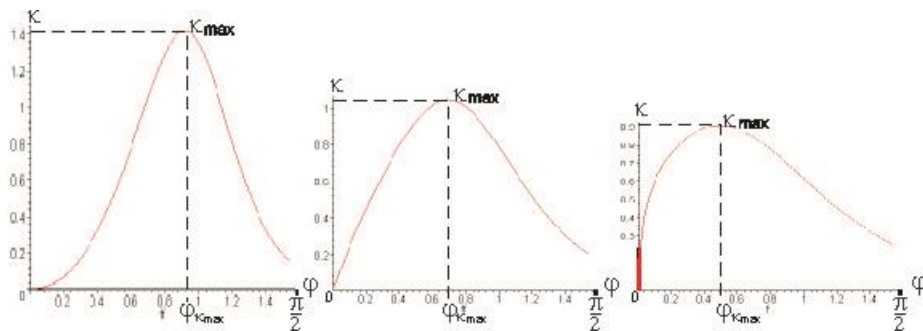
A három eredmény összehasonlítása a 7. ábrán megtekinthető.



5. ábra Képzetes hengervetület A) b) verzió



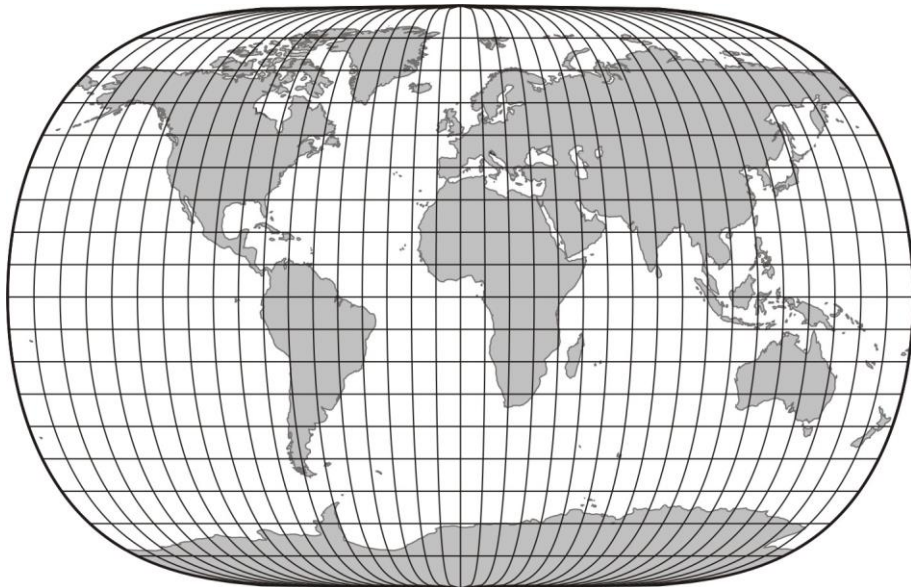
6. ábra Képzetes hengervetület A) c) verzió



7. ábra A  $\kappa$  görbület változása a  $\varphi$  szélesség függvényében az A) vetülettípus a), b) és c) vetületénél

B)  $c_2=2$ ,  $c_3 \neq 2$ : Ez a vetülettípus torzultsági szempontból igen előnyös.

a) Az átlagos torzultság a  $c_1=0,75762$ ;  $c_3=4,63375$ ;  $c_4=0,00264$  értékeknél adódik a legkisebbnek:  $E_{\kappa^2}=0,12406$ , azaz  $E_{\kappa}=0,35222$ , ami mintegy 4%-kal kisebb az A) a) vetülettípus  $E_{\kappa}$  értékénél. A görbület jellemzői:  $\kappa_{\max}=0,95277$ ;  $\varphi_{\kappa_{\max}}=73^\circ$ ;  $\kappa_{\text{atl}}=0,64084$ ;  $g=1,48675$  (8. ábra)

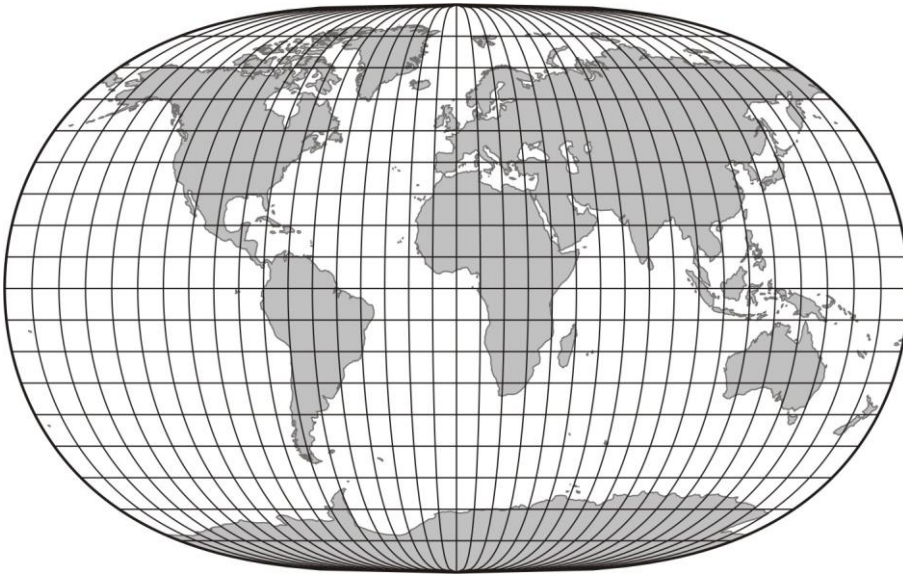


8. ábra Képzetes hengervetület B) a) verzió

A görbület az egyenlítőnél 0,427, innen távolodva fokozatosan nő a  $\pm 73^\circ$ -on felvett maximumáig, majd a pólusokig gyorsan csökken zérusra. A póluspontos jelleg alig észrevehető, a kontúrvonal alakja nagyon hasonlít a pólusvonalas vetületekéhez.

- b) A kontúrvonal maximális görbületét  $i=2$ , azaz az  $Err = E_K \cdot \sqrt[4]{\kappa_{\max}/\kappa_{atl}}$  kifejezés minimalizálásával csökkentjük:  **$c_1=0,75689$ ;  $c_3=3,17942$ ;  $c_4=0,00516$**  mellett  $\kappa_{\max}=0,71333$ ,  $\varphi_{\kappa_{\max}}=54^\circ$ ;  $\kappa_{atl}=0,63957$ ;  $g=1,11533$ ; továbbá  $E_K^2=0,12841$ , azaz  $E_K=0,35835$  (9. ábra).

Az előző vetülethez képest a  $g$  arány mintegy 25%-kal csökken, a póluspontos jelleg már érzékelhető, az  $E_K$  torzultság csak 1,74%-kal nő.



9. ábra Képzetes hengervetület B) b) verzió

- c) A kontúrvonal maximális görbületét  $i=0$ , azaz az  $Err = E_K \cdot \kappa_{\max}/\kappa_{atl}$  kifejezés minimalizálásával csökkentjük:  **$c_1=0,74657$ ;  $c_3=3,00624$ ;  $c_4=0,00547$**  mellett  $\kappa_{\max}=0,70313$ ;  $\varphi_{\kappa_{\max}}=48^\circ$ ;  $\kappa_{atl}=0,63935$ ,  $g=1,00976$ ; továbbá  $E_K^2=0,13003$ , azaz  $E_K=0,36059$ .

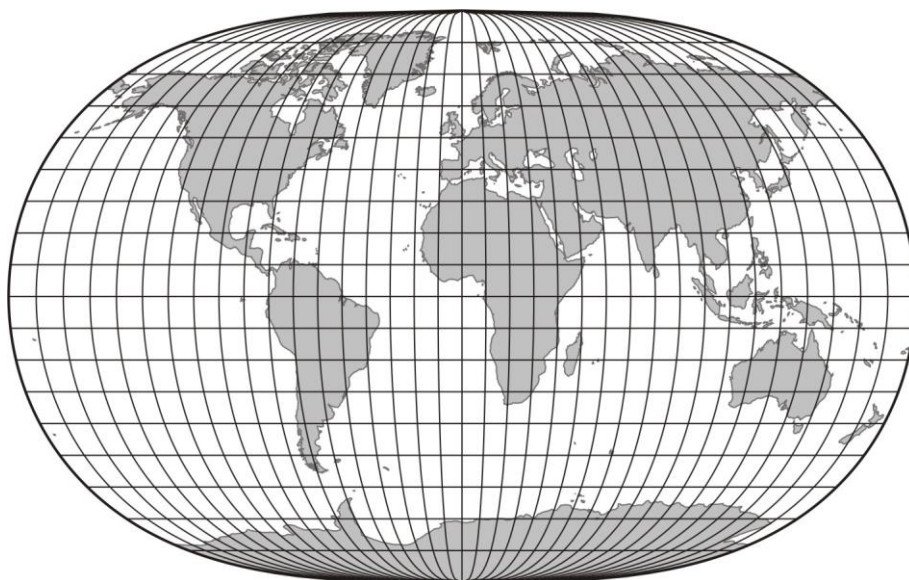
A  $g$  arány további 7%-kal csökken, a póluspontos jelleg jobban látható, a kontúrvonal alakja határozottan ovális (10. ábra). A torzultság a B) alapvetületéhez képest 2,38%-kal nő, ami viszont már túllépi a toleranciaküszöböt.

- C)  **$c_2 \neq 2$ ,  $c_3 \neq 2$** : Ez a vetülettípus torzultsági szempontból a legelőnyösebb, de az  $E_K$  torzultsági érték csak mintegy 0,1%-kal kisebb a b) változaténál. Ezzel szemben a kontúrvonalnak az egyenlítőnél szingularitása van: a görbület a végtelenhez tart, ami egy látszólagos, bár alig észrevehető töréspontot hoz létre. Ezért ezzel a továbbiakban nem foglalkozunk.

## Következtetések

A bemutatott általános torzulású képzetes hengervetületek fokhálózatára összességében jellemző, hogy középmeridiánban hossztartók, az egyenlítő hossza a valódi hosszának (a középmeridián hossza kétszeresének) általában mintegy  $\frac{3}{4}$ -e. A parallelkörök mentén a meridiánok osztásközei  $c_4 > 0$  miatt a középmeridiántól a határoló meridiánok felé haladva lassan nőnek.

Az A) vetülettípus főleg akkor kerülhet előtérbe, ha a póluspontos jelleg az ábrázolásnál erős hangsúlyt kap (pl. a magasabb szélességeken elterülő térképi tartalom relevanciája miatt). A torzultsági értékek és a kontúrvonal alakjának együttes figyelembevétele mellett ezen belül a b) verziót tekintjük a legjobbnak.



**10. ábra** Képzetes hengervetület B) c) verzió

A B) vetülettípus elsősorban a nagyon kedvező torzultsági tulajdonságai miatt ajánlható, elsősorban akkor, ha a póluskörnyéki területek a tematika szempontjából nem kiemelt fontosságúak. Az előnye főleg akkor válik szembetűnővé, ha összehasonlítjuk néhány más, általános torzulású, világtérképekhez gyakran használt vetület torzultsági értékeivel:

Van der Grinten vetülete	$E_K=0,5769$
Aitoff vetülete	$E_K=0,5218$
Baranyi IV. vetülete	$E_K=0,4067$
Optimális torzulású hengervetület B) b) verzió	$E_K=0,35835$

A Van der Grinten-vetülethez képest ez 38%-os, tekintélyes torzultság-csökkenést jelent. Ugyanakkor a torzultsági szempontból legkedvezőbb C) verziót és a

szintén nagyon jó B) a) verziót a kontúrvonaluk előnytelensége miatt csak speciális esetben tartjuk preferálandónak.

### **Irodalomjegyzék**

AIRY, G. B., 1861. Explanation of a projection by balance of errors for maps applying to a very large extent of the Earth's surface, and comparison of this projection with other projections. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine* 22(4) pp.409–421.

[BAJEVA] БАЕВА, Е. Ю., 1987. Критерии оценки достоинства картографических проекций, используемых для составления карт мира. *Геодезия и Аэрофотосъемка* 1987(3) pp.109–112.

BARANYI J., 1987. Konstruktion anschaulicher Erdabbildungen. *Kartographische Nachrichten*, 37(1). pp.11-17.

CANTERS, F., 2002. *Small-scale Map Projection Design*. London, New York: Taylor & Francis.

FRANČULA, N., 1971. *Die vorteilhaftesten Abbildungen in der Atlaskartographie*. Bonn: Institut für Kartographie und Topographie der Rheinischen Friedrich, Wilhelm-Universität.

GYÖRFFY, J., 2012. *Térképészet és geoinformatika II. Térképvetületek*. Budapest: ELTE Eötvös Kiadó.

GYÖRFFY, J., 2016. Some Remarks on the Question of Pseudocylindrical Projections with Minimum Distortions for World Maps. *Progress in Cartography*. Switzerland: ICA- Springer International Publishing. pp.253-265.

[KAVRAJSZKIJ, V. V.] КАВРАЙСКИЙ, В. В., 1958. *Избранные труды*, т. 2. вып. 1. ГС ВМФ Москва

KLINGHAMMER, I., 2015. A kartográfia alapjairól: a térképvetületek kezdetei. *Geodézia és Kartográfia*, 7(8). Budapest. pp.14-19.

SNYDER, J. P., 1985. *Computer-assisted map projection research*. U.S. Geological Survey Bulletin no. 1629. Washington: United States Government Printing Office.